Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 6B. Wymagania stawiane funkcjom kształtu

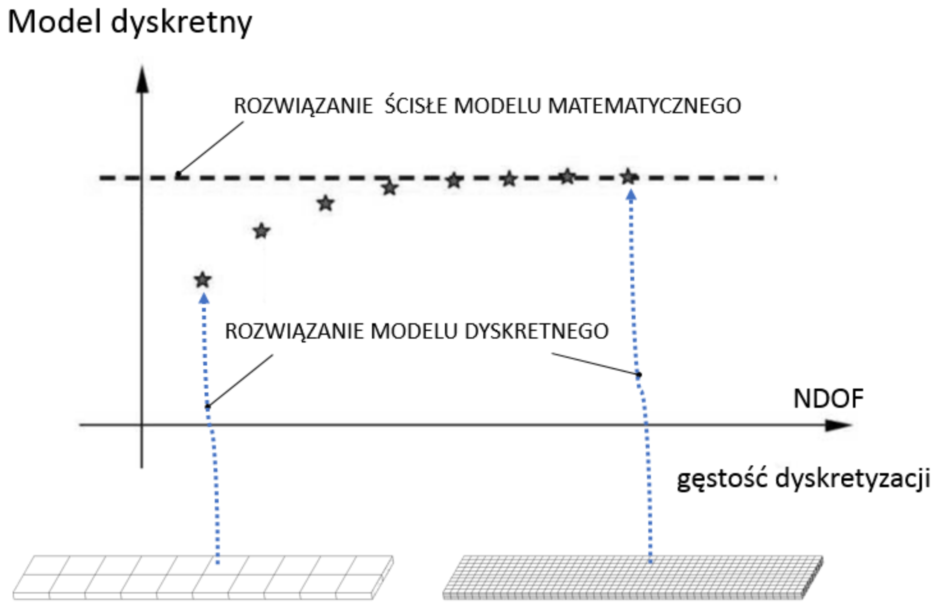
03.2022

Wymagania stawiane funkcjom kształtu

a) Pozwala na przybliżenie stałej wartości funkcji $\{u\}$ wewnątrz elementu

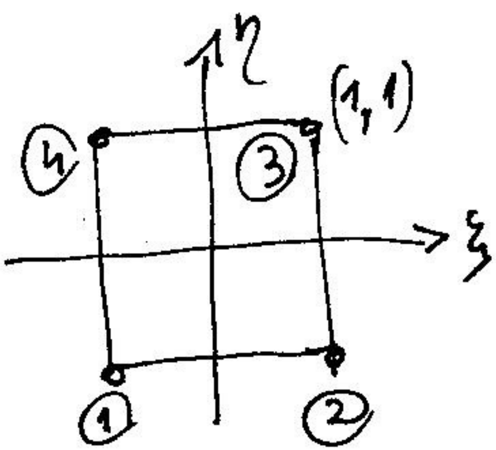
b) Zapewnia ciągłość, na granicy pomiędzy elementami, funkcji przemieszczeń $\{u\}$ i jej pochodnych do stopnia o jeden niższego niż najwyższa pochodna $\{u\}$ występująca w funkcjonale całkowitej energii potencjalnej V.

Jeśli wymaganie a) i b) jest spełnione, to rozwiązanie przybliżone zdąża do rozwiązania ścisłego wraz ze zwiększaniem ilości stopni swobody.



Przykład Sprawdzić wymagania stawiane funkcjom kształtu elementu 4-węzłowego

$$N_1(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

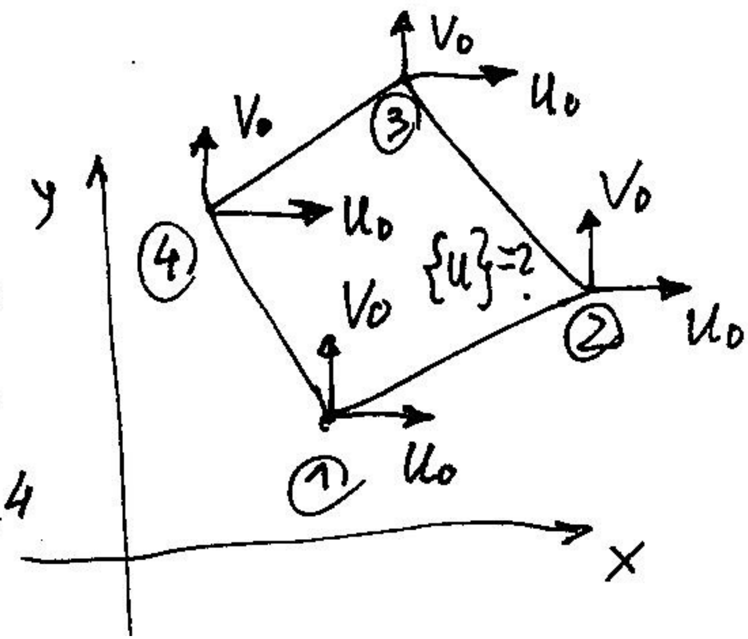


a)

$u_i = u_0$

$v_i = v_0$

$i = 1,2,3,4$



$$\underset{2\times 1}{\{u\}} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} (N_1 + N_2 + N_3 + N_4)\, u_0 \\ (N_1 + N_2 + N_3 + N_4)\, v_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}\left((1-\xi)\cdot(1-\eta) + (1+\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1+\eta) + (1-\xi)(1+\eta) \right) \cdot u_0 \\ \frac{1}{4}(\ldots)\, v_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}\left((1-\xi+1+\xi)(1-\eta) + (1+\xi+1-\xi)(1+\eta) \right) u_0 \\ \frac{1}{4}(\ldots)\, v_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}\left(2(1-\eta) + 2(1+\eta) \right) u_0 \\ \frac{1}{4}(\ldots)\, v_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$$

Warunek a) spełniony

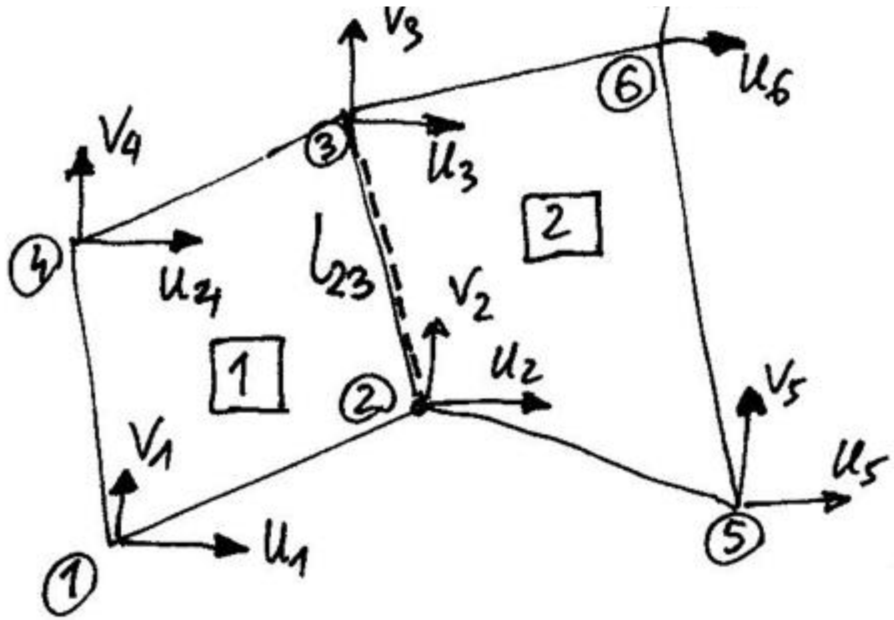
$$V_e = U_e - W_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} \underset{1\times3}{\lfloor\varepsilon\rfloor}\,\underset{3\times3}{[D]}\,\underset{3\times1}{\{\varepsilon\}}\,d\Omega_e - \int_{\Omega_e}\underset{1\times2}{\lfloor X\rfloor}\,\underset{2\times1}{\{u\}}\,d\Omega_e - \int_{\Gamma_{pe}}\underset{1\times2}{\lfloor p\rfloor}\,\underset{2\times1}{\{u\}}\,d\Gamma_{pe}$$

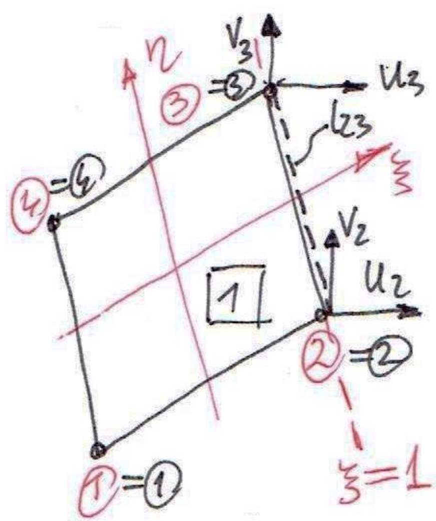
$$\{\varepsilon\} = \underset{3\times2}{[R]}\,\underset{2\times1}{\{u\}}$$

(Pierwszy stopień jest najwyższym stopniem pochodnej w funkcjonale V)

zawiera operatory różniczkowe stopnia pierwszego

Warunek b) jest spełniony jeśli funkcja $\{u\}$ jest ciągła pomiędzy elementami





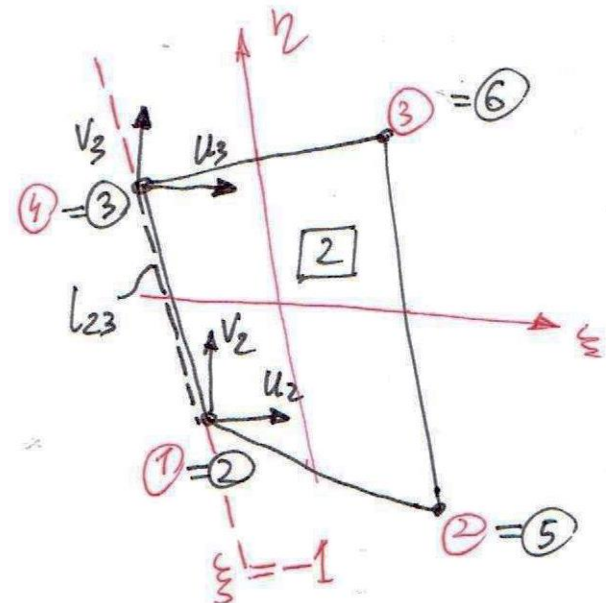
funkcje kształtu na brzegu l_{23}

$$N_1 = 0,\ N_2 = \tfrac{1}{2}(1-\eta),\ N_3 = \tfrac{1}{2}(1+\eta),\ N_4 = 0$$

$$u\Big|_{23}^{\boxed{1}} = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 =$$

$$= N_2 u_2 + N_3 u_3 = \tfrac{1}{2}\left((1-\eta)u_2 + (1+\eta)u_3\right)$$

$$v\Big|_{23}^{\boxed{1}} = \tfrac{1}{2}\left((1-\eta)v_2 + (1+\eta)v_3\right)$$



funkcje kształtu na brzegu l_{23}

$$N_1 = \tfrac{1}{2}(1-\eta),\ N_2 = 0,\ N_3 = 0,\ N_4 = \tfrac{1}{2}(1+\eta)$$

$$u\Big|_{23}^{\boxed{2}} = N_1 \cdot u_2 + N_2 \cdot u_5 + N_3 \cdot u_6 + N_4 \cdot u_3 =$$

$$= N_1 \cdot u_2 + N_4 \cdot u_3 = \tfrac{1}{2}\left((1-\eta)u_2 + (1+\eta)u_3\right)$$

$$v\Big|_{23}^{\boxed{2}} = \tfrac{1}{2}\left((1-\eta)v_2 + (1+\eta)v_3\right)$$

$$u\Big|_{23}^{\boxed{1}} = u\Big|_{23}^{\boxed{2}} \quad \text{i} \quad v\Big|_{23}^{\boxed{1}} = v\Big|_{23}^{\boxed{2}} \Rightarrow$$

Warunek b) spełniony